



Universidad
Zaragoza

Trabajo de Fin de Grado:
Problemas Ultravioletas de Gravitación
Cuántica

Grado en Física

Autor:
Jorge Morón Vidal

Director:
Manuel Asorey Carballeira

Facultad de Ciencias
2017/2018

Resumen

El propósito de este trabajo es discutir las propiedades y patologías de algunas teorías de gravedad cuántica propuestas en el último medio siglo. En primer lugar analizamos la teoría de Hilbert-Einstein y los criterios que la teoría debe cumplir dentro del paradigma de la física cuántica de campos. Mostramos por qué la relatividad general no es válida para el desarrollo de una teoría de gravedad cuántica consistente. Finalmente, aplicamos estos mismos criterios a algunas de las teorías de gravedad bastante populares mostrando que tampoco satisfacen las condiciones de consistencia.

Índice

1. Introducción	1
1.1. ¿Por qué es necesaria una teoría de gravedad cuántica?	1
1.2. Unidades de Planck	1
2. El Lagrangiano de Hilbert Einstein	2
3. Algunas nociones de física cuántica de campos	5
3.1. Funciones de Wightman y funciones de Schwinger	5
3.2. La representación de Källén-Lehmann	6
3.3. Renormalización	7
3.4. Requisitos básicos para la consistencia de una teoría de campo cuántico	9
4. Gravedad cuántica con derivadas de orden superior	10
4.1. Por qué la teoría actual no es cuantizable	10
4.2. Formulación de una nueva acción	11
5. Gravedad cuántica con términos no locales	14
5.1. Unitariedad en teorías con términos no locales en la acción	14
6. Conclusiones	20

1. Introducción

1.1. ¿Por qué es necesaria una teoría de gravedad cuántica?

Actualmente la física fundamental se sustenta sobre dos paradigmas radicalmente distintos: La física cuántica de campos y la relatividad general. Mientras que la física cuántica de campos encuentra su rango de aplicación en fenómenos a escalas subatómicas y en los que se ven involucrados cuerpos ligeros como la física de partículas, el dominio de la relatividad general son los sistemas cosmológicos, donde las distancias y las masas son muy grandes.

Sin embargo, existen sistemas que encajan simultáneamente en ambos marcos teóricos como la singularidad previa a la inflación cósmica o los agujeros negros. En ambas situaciones nos encontramos con grandes cantidades de masa concentradas en regiones del espacio-tiempo muy pequeñas.

Además se espera que, de la mano de una teoría de gravedad cuántica, vengan otras soluciones a algunas de las lagunas de la teoría cuántica de campos como la no linealidad del colapso de la función de ondas [1] o la divergencia de algunos conjuntos de diagramas de Feynmann. [2]

1.2. Unidades de Planck

Las constantes fundamentales implicadas en una teoría de gravedad cuántica serán la velocidad de la luz c , la constante de gravitación universal G y la constante de Planck \hbar . En el sistema de unidades de Planck, estas tres constantes se igualan a 1

$$c = 1 \quad G = 1 \quad \hbar = 1 \quad (1.1)$$

de modo que longitud, masa y tiempo pueden expresarse como múltiplos adimensionales de la longitud de Planck l_P , la masa de Planck m_P y el tiempo de Planck t_P definidas en función de las constantes G , \hbar y c

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35} m \quad m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.18 \cdot 10^{-8} kg \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.39 \cdot 10^{-44} s \quad (1.2)$$

a partir de las cuáles podemos definir la energía de Planck E_P y la densidad de Planck ρ_P

$$E_P = m_P c^2 \approx 1.6 \cdot 1.22 \cdot 10^{19} GeV \quad \rho_P = \frac{m_P}{l_P^3} \approx 5.15 \cdot 10^{96} kg/m^3 \quad (1.3)$$

salvo m_P , todas estas magnitudes se encuentran muy lejos de nuestro alcance experimental. De hecho, el LHC de Ginebra ha logrado "tan solo" los $1.4 \cdot 10^4 GeV$, valor que encuentra a 15 órdenes de magnitud de las energías a las cuáles se espera que emerjan fenómenos atribuibles a la gravedad cuántica.

Esto hace de la formulación de teorías de gravedad cuántica una tarea peculiar ya que no se tiene evidencia experimental de ningún evento indudablemente atribuible a un fenómeno que sea al mismo tiempo de naturaleza gravitacional y cuántica. De hecho, ni siquiera se tiene la certeza de que el espacio-tiempo sea un campo cuántico en alguna escala. Así, en lo consiguiente

nos limitamos a detectar las incoherencias teóricas que aparecen en la formulación de teorías de gravedad cuántica y proponemos distintas opciones para subsanarlas.

De aquí en adelante se hará uso de unidades naturales en las que $\hbar = 1$ $c = 1$.

2. El Lagrangiano de Hilbert Einstein

La relatividad general se fundamenta sobre el principio de equivalencia, el cuál postula que localmente, para todo sistema que evoluciona en el seno de un campo gravitatorio existe un sistema de referencia no inercial con respecto al cual éste es indistinguible de uno que evoluciona libremente. Matemáticamente esta asunción toma la forma de la ecuación de campo gravitatorio $G_{\mu\nu}$ propuesta por Einstein [3]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

donde T_{ab} es el tensor energía momento. El escalar de Ricci R es una contracción del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ que a su vez es una contracción del tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$

$$R = R^\mu_\mu = R_{\mu\nu}g^\mu_\nu \quad R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\sigma\mu\nu} \quad (2.2)$$

que se define en función de los símbolos de Christoffel $\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \sum_\alpha (\Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}) \quad (2.3)$$

que dependen de la métrica del espacio-tiempo en el que nos encontremos $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} \quad (2.4)$$

Así, la métrica de una región del espacio-tiempo determina unívocamente el campo gravitatorio en dicha región. A su vez, la métrica dependerá de las distribuciones de masa y/o energía que se encuentren en la región espacio-temporal que nos concierna.

Si lo que queremos es formular una teoría cuántica de la gravedad, precisamos trasladar (2.1) al marco de la mecánica Lagrangiana. En este caso, la variable de campo es la métrica del espacio tiempo que definimos en una variedad tetradimensional M . Sea ψ_λ una familia uniparamétrica y suave de configuraciones del campo que estamos considerando contenida en M . Definiremos una densidad lagrangiana $\mathcal{L}[\psi]$ que, para encajar en nuestro formalismo, debe ser una función local de ψ y de un número finito de sus derivadas¹

$$\mathcal{L}|_x = \mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x)) \quad (2.5)$$

Mediante la integral de dicha densidad a todo el espacio de configuraciones disponibles obtenemos el funcional S también conocido como acción

$$S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi] \quad (2.6)$$

¹Obsérvese que las derivadas en este caso son covariantes debido a que nos encontramos en un espacio curvo.

para el cual existe un tensor χ dual a ψ_λ que cumple que

$$\frac{dS}{d\lambda} = \delta S = \int_M \chi \delta\psi \quad (2.7)$$

siendo $\delta\psi = \frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}$. La integral que se lleva a cabo en (2.6) requiere de la definición de un elemento de volumen i.e. una n-forma ϵ no nula y continua que para el caso de la relatividad general es

$$\epsilon = \sqrt{-g} d^4x \quad (2.8)$$

donde g representa el determinante del tensor métrico.

Históricamente la densidad lagrangiana asociada al campo gravitatorio en el contexto de la relatividad general es el escalar de Ricci definido en (2.2). La mecánica clásica se rige según el principio de mínima acción según el cuál, un campo tomará aquella o aquellas configuraciones que minimicen la acción definida sobre él que, para las acciones de la forma (2.6), vienen dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.9)$$

en las que ϕ sería un campo inmerso en un espacio-tiempo curvo. Sin embargo, en este caso

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.10)$$

para extraer las ecuaciones del campo vamos a recurrir al cálculo variacional. La derivada funcional de (2.10) es

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{16\pi G} \int \delta \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.11)$$

La variación de $g_{\mu\nu}$ puede extraerse del la siguiente propiedad de la métrica

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (2.12)$$

como la delta de Kronecker es un funcional de componentes constantes, su variación será nula lo cuál nos permite en adelante escribir la variación del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ en función del inverso del tensor métrico $g^{\mu\nu}$

$$\delta(\delta_{\mu\nu}) = 0 \leftrightarrow 0 = \delta g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} \leftrightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} \delta g^{\rho\lambda} \quad (2.13)$$

Tal y como aparece en [4] el primero de los sumandos puede abordarse teniendo en cuenta la definición del Tensor de Ricci (2.2) y realizando variaciones sobre los símbolos de Christoffel para obtener finalmente que dicho término depende del comportamiento de la métrica y su primera derivada en la frontera del hipervolumen de integración (Que en nuestro caso es infinito). La contribución de la métrica puede hacerse cero imponiendo que la variación sobre ésta se anula en el infinito, no ocurriendo lo mismo con la primera derivada. Sin embargo, esto no importa de cara al resultado que vamos a obtener.

El segundo sumando ya está en función de la variación de la inversa de la métrica por lo que lo dejaremos como está. Por último, de cara a evaluar el tercer sumando hemos de calcular $\delta\sqrt{-g}$ para lo cual haremos uso de que, para toda matriz cuadrada X con determinante no nulo

$$\ln(\det X) = \text{Tr}(\ln M) \rightarrow \frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) \quad (2.14)$$

Bajo el convenio de suma de Einstein, si llamamos N al producto $M^{-1} \delta M$ y suponemos que M es un tensor dos veces covariante

$$N^\rho_\nu = (M^{-1})^{\rho\mu} (\delta M)_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

la traza de N equivale a realizar una contracción de los índices μ y ν

$$\text{Tr}(N^\rho_\nu) = N^\nu_\nu = (M^{-1})^{\mu\nu} (\delta M)_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

sustituyendo M por $g_{\mu\nu}$ y aplicando (2.13)

$$\delta g = -g (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (2.17)$$

Ahora ya nos encontramos en condiciones de abordar el cálculo de

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{g (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.18)$$

reescribimos (2.11) teniendo en cuenta lo calculado anteriormente

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.19)$$

El conjunto de configuraciones de la métrica que harán mínima la acción serán aquellos para los que

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} = 0 \leftrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (2.20)$$

lo cuál equivale a (2.1) para el caso en el que el tensor energía-momento es nulo i.e. en el vacío. Podría sumarse un término S_M a la acción que cumpliera

$$\frac{\delta S_M}{\delta g_{ij}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

y de esa manera recuperar (2.1) también para el caso en el que el tensor energía-momento no es nulo.

Cabe mencionar que a la acción (2.10) se le podría añadir un término Λ o constante cosmológica

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.22)$$

lo cual modificaría las ecuaciones de movimiento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

La constante cosmológica dota de una densidad de energía (Y por lo tanto, una curvatura) no nula al espacio-tiempo vacío. Fue un recurso introducido por Einstein para explicar el corrimiento al rojo de la radiación proveniente de cuerpos lejanos sin necesidad de suponer un universo en continua expansión.

Sin embargo, actualmente se sabe que el universo se expande aceleradamente lo cual implica una constante cosmológica positiva y de valor muy pequeño [5].

3. Algunas nociones de física cuántica de campos

La física cuántica de campos surgió como solución común de varios problemas a los que se enfrentaba la física de principios del siglo XX:

- La unificación de los marcos teóricos de la relatividad especial y la mecánica cuántica.
- La cuantización de los campos clásicos.
- La explicación de procesos en los que la cantidad de partículas no se conserva.

Bajo estos preceptos, emergió una teoría capaz de predecir cantidades² con una precisión inconcebible hasta entonces y cuyo marco teórico ha permitido desarrollar el modelo standard el cual es, hasta la fecha de escritura de este resumen, el modelo físico más consistente con los experimentos a escalas subatómicas.

3.1. Funciones de Wightman y funciones de Schwinger

Debido al carácter operacional de los campos

$$\phi(\tilde{f}) = \int \phi(x) \tilde{f}(x) d^4x \quad (3.1)$$

en el espacio de Fock³ es preferible trabajar con los valores esperados de los operadores sobre el vacío [6]

$$W(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \dots \tilde{f}_n) = \langle 0 | \phi(\tilde{f}_1) \phi(\tilde{f}_2) \dots \phi(\tilde{f}_n) | 0 \rangle \quad (3.2)$$

que se conocen como funciones de Wightman. Sin embargo, éstas muestran un comportamiento oscilatorio que puede evitarse mediante la extensión analítica del campo cuántico al espacio euclídeo⁴ para la cuál redefinimos la coordenada temporal $\tau = ix_0$. Así, el campo en un tiempo

²Como el momento giromagnético del electrón.

³El espacio de Fock es el espacio de Hilbert sobre el que actúan los operadores de los campos cuánticos.

⁴Recordemos que la teoría cuántica de campos se define sobre el espacio de Minkowski.

τ toma la forma

$$\phi_E(x, \tau) = e^{\tau H} \phi(x, 0) e^{-\tau H} \quad (3.3)$$

a partir de la cuál se definen los operadores de campo euclídeos.

$$\phi_E(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{R}^4} \phi_E(x, \tau) \tilde{f}(x, \tau) \quad (3.4)$$

Los operadores evolución temporal bajo el nuevo convenio no están acotados para $\tau < 0$, por lo que tendremos que introducir una ordenación temporal de los productos de los operadores de campo $\phi(\tau_1) \dots \phi(\tau_n)$ de manera que $\tau_1 > \tau_2 > \dots \tau_n$

$$S_n(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \dots \tilde{f}_n) = \langle 0 | \phi_E(\tilde{f}_1) \phi_E(\tilde{f}_2) \dots \phi_E(\tilde{f}_n) | 0 \rangle \quad (3.5)$$

dando lugar a lo que se conocen como funciones de Schwinger. La teoría cuántica formulada en base a las funciones de Schwinger es equivalente a la formulada en tiempos no euclídeos.

3.2. La representación de Källén-Lehmann

Källén y Lehmann descubrieron que la función de correlación entre dos puntos en el marco de las teorías cuánticas de campos que presentaban términos de interacción puede escribirse como una combinación lineal de los propagadores del campo libre D_F pesados por una función ρ definida positiva y conocida como función de densidad espectral[7].

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2) \quad (3.6)$$

en la que ρ se define como.

$$\rho(M^2) = \sum_{\alpha} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \quad (3.7)$$

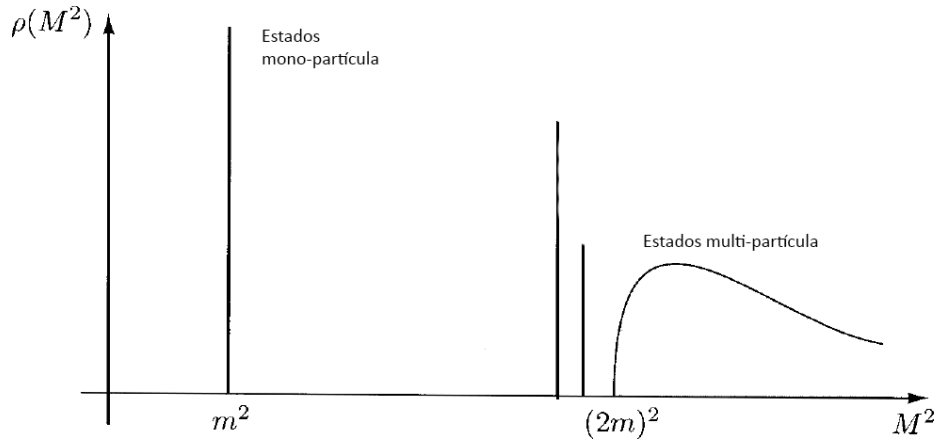


Figura 3.1: Representación gráfica de (3.7) para un campo interactuante genérico. [7]

Como se puede ver en 3.1 las funciones densidad suelen contar con tres regiones bien diferenciadas

$$\rho(M^2) = 2\pi Z \delta(M^2 - m^2) + (\text{Estados ligados}) + (\text{Estados multipartícula}) \quad (3.8)$$

Los estados monopartícula surgen en $M^2 = m^2$ en forma de una función delta multiplicada por un factor Z asociado con la renormalización de la intensidad del campo. Es importante destacar que la masa en reposo de la partícula que emerge de dicho campo m no suele corresponderse con la masa del Lagrangiano m_0 .

Los estados multipartícula emergen a partir de $M^2 = 4m^2$ en forma de continuo. Pueden existir entre $M^2 = m$ y $M^2 = 4m^2$ estados enlazados que aparezcan también como funciones delta, similares a las de los estados monopartícula.

3.3. Renormalización

Uno de los obstáculos con los que se topó la formulación de la física cuántica de campos en sus primeras etapas fue la aparición de cantidades divergentes entre sus predicciones. Pese a que matemáticamente este hecho no plantea ningún problema, físicamente anulan la predictibilidad de nuestra teoría. Las cantidades infinitas no se han medido y, aún si estuviesen ahí, no serían medibles.

Un ejemplo bastante sencillo de infinito emerge de la cuantización canónica de un campo escalar libre [6] cuyo Hamiltoniano puede escribirse sobre la base de modos normales en función del campo $\phi(f_n) = \phi_n$ y su momento canónico conjugado $\pi(f_n) = \pi_n$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(|\pi_n|^2 + |\phi_n|^2 \left(\left| \frac{2\pi_n}{L} \right|^2 + m^2 \right) \right) \quad (3.9)$$

que describe un conjunto de infinitos osciladores armónicos de frecuencia

$$\omega_n = \sqrt{\left| \frac{2\pi_n}{L} \right|^2 + m^2} \quad (3.10)$$

El estado fundamental de este Hamiltoniano, el cual se toma en teoría cuántica de campos como vacío viene dado en la representación de Schrödinger por

$$\psi_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\omega_n |\phi_n|^2 + \log 2\pi \right) \right\} \quad (3.11)$$

tiene asociada una energía E_0 dada por

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \omega_n \quad (3.12)$$

Las contribuciones de los modos de alta energía junto al hecho de que la energía del nivel fundamental de un oscilador armónico cuántico no es nula, hacen de E_0 una cantidad divergente. Como dicha divergencia se debe a la presencia de modos de muy alta energía, se denomina

divergencia ultravioleta⁵

Divergencias de este tipo aparecen a lo largo y ancho de la física cuántica de campos. Feynman, Tomonaga y Dyson entre otros solventaron mediante la renormalización el problema de algunas estas divergencias en los años 50 sin embargo, no fue hasta los años 70 cuando Kenneth Wilson le dio a la renormalización el trasfondo teórico que tiene hoy en día.

El conjunto de técnicas y recursos matemáticos que se usan para llevar a cabo dicha renormalización se aglutinan bajo lo que se conoce como Grupo de Renormalización. Dichos recursos giran entorno a estudiar la variación de los valores de las constantes de acoplo del Hamiltoniano de un sistema cuando se realizan transformaciones de escala sobre éste. El rango de aplicación del Grupo de Renormalización va más allá de la teoría cuántica de campos siendo usado también en la física del estado sólido o en cosmología.

Uno de los modos de renormalizar (3.12) es mediante la introducción de un *cutoff* Λ en el momento de manera que el Hamiltoniano renormalizado

$$H_{ren} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (H - E_0(\Lambda)) \quad (3.13)$$

donde, en el límite en el que las dimensiones de espacio tomado en consideración L son grandes

$$E_0(\Lambda) = \frac{1}{2} \int_L d^3x \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega(k) \quad (3.14)$$

Se dice que hemos *absorbido* la divergencia en un nuevo término E_0 de manera que H_{ren} es un Hamiltoniano finito del cual se pueden obtener predicciones finitas. En teorías de mayor calado, otras constantes son renormalizadas como la masa del campo y la constante de acoplo λ en el campo escalar con interacción $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ o la carga eléctrica del electrón en el marco de la electrodinámica cuántica. No profundizaremos más en las técnicas y aspectos de la renormalización ya que lo que nos ocupa en este caso es llegar a saber si una teoría es renormalizable, no cómo debe llevarse a cabo dicha renormalización.

La demostración de este hecho es bastante engorrosa, sin embargo, se puede intuir desde la dimensionalidad de las constantes implicadas en la acción de una teoría de campos cuánticos. Supongamos un campo escalar cualquiera ϕ de Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (3.15)$$

La acción en un espacio-tiempo d -dimensional viene dada por

$$S = \int \mathcal{L} d^d x \quad (3.16)$$

el término cinético de la acción $\int (\partial^\mu \phi) d^d x$ deberá ser adimensional. Como cada dx tiene dimensiones de $[masa]^{-1}$ dimensión del campo debería ser $[masa]^{\frac{d-2}{2}}$. Usando de nuevo la adi-

⁵En la formulación de otras teorías como la electrodinámica cuántica surgen también divergencias debidas a la presencia de estados de muy baja energía. A estas divergencias se les llama infrarrojas.

mensionalidad de la acción, se deduce que la dimensión de la constante de acoplo del término de autointeracción λ es $[masa]^{d-\frac{n(d-2)}{2}}$

Consideremos ahora un diagrama de Feynmann asociado a un campo escalar ϕ dotado de N líneas externas y V vértices. Para que dicho diagrama emerja de la teoría que nos ocupa, debe de existir en el correspondiente Lagrangiano un término del tipo $\nu\phi^N$ donde, siguiendo el razonamiento llevado a cabo en el párrafo anterior, ν tendrá unidades de $[masa]^{d-\frac{N(d-2)}{2}}$ y éstas serán las unidades de cualquier diagrama amputado con N líneas externas. Por otro lado, los términos divergentes del diagrama serán proporcionales a $\lambda^V\Lambda^D$. Donde el *cutoff* Λ tiene unidades de momento, es decir, de $[masa]$ y D es el grado de divergencia superficial del diagrama. Si D es positivo, el diagrama tenderá a infinito en el límite $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}$, en este caso se dice que la teoría que origina dicho diagrama presenta divergencias ultravioleta. Así pues, el análisis dimensional nos lleva a que

$$[\nu] = [\lambda^V\Lambda^D] \leftrightarrow d - \frac{N(d-2)}{2} = D + V \left(d - \frac{n(d-2)}{2} \right) \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta que en cada orden de perturbación, la fórmula LSZ⁶ introduce nuevos vértices en los diagramas que aparecen, nos podemos encontrar tres tipos de comportamientos con respecto a las divergencias ultravioletas en una teoría cuántica de campo escalar dependiendo de la dimensionalidad de su constante de acoplo.

- $d - \frac{n(d-2)}{2} > 0$: En este caso, cuanto mayor sea el orden de la perturbación con la que se corresponde un diagrama, menor será su grado de divergencia. Este tipo de teorías se denominan superrenormalizables.
- $d - \frac{n(d-2)}{2} = 0$: Si uno de los diagramas es divergente en este supuesto, todos los de los demás órdenes perturbativos lo serán. Sin embargo, dado que todos ellos tendrán el mismo orden de divergencia superficial D , sus divergencias podrán ser absorbidas en un número finito de parámetros de la teoría que se denomina renormalizable.
- $d - \frac{n(d-2)}{2} < 0$: Para este último caso, cada corrección añadida por un nuevo orden de perturbación es más divergente que la anterior. Se tienen incontables diagramas divergentes que requerirían de incontables parámetros para ser reabsorbidos. Estas teorías no son susceptibles de ser renormalizadas a nivel perturbativo y por ello se clasifican como no renormalizables.

3.4. Requisitos básicos para la consistencia de una teoría de campo cuántico

Ya hemos sentado las bases para exponer los principios que habrán de respetar las teorías de campos cuánticos para ser válidas.

- **Analiticidad** Las funciones de Wightman (3.2) deben definir distribuciones reguare y admitir una continuación analítica a las funciones de Schwinger.

⁶LSZ viene de Lehmann, Symanzik, Zimmermann. La formula LSZ permite calcular perturbativamente los términos de la matriz de scattering bajo el formalismo de la física cuántica de campos.

- **Positividad de la reflexión** Las funciones de Schwinger deben cumplir la propiedad de positividad de la reflexión de Osterwalder-Schrader que para el caso de una función de correlación de dos puntos es

$$\int \theta f(x) S_2(x, y) f(y) \geq 0 \quad (3.18)$$

Donde θ es el operador de inversión temporal $\theta f(x_0, x_i) = f^*(-x_0, x_i)$

- **Representación de Källen-Lehman** Las transformadas de Fourier de las funciones de Schwinger deben poder ser representadas mediante el formalismo de Källen-Lehman (3.6).
- **Renormalizabilidad** En el caso de que el campo considerado muestre infinitos, estos deben de poder ser reabsorbidos mediante la renormalización de un número finito de parámetros de acoplo. Sólo las teorías renormalizables y superrenormalizables tienen cabida en la física cuántica de campos.

4. Gravedad cuántica con derivadas de orden superior

4.1. Por qué la teoría actual no es cuantizable

Para que un campo físico sea coherente con el paradigma actual debe ser descrito según los principios de la teoría cuántica a nivel fundamental, esto es, que los estados del sistema pertenezcan al espacio de Hilbert y que los observables se identifiquen con operadores lineales autoadjuntos actuando sobre dicho subespacio. Debido al cuarto postulado de la mecánica cuántica, los valores que pueden obtenerse al medir una determinada magnitud pertenecen al conjunto de autovalores del observable asociado a dicha magnitud de manera que, si el estado en el que se encuentra el sistema es un autoestado de dicho observable, el resultado de la medida será el autovalor de dicho autoestado. Sin embargo, cuando el sistema no se encuentra en uno de los autoestados del operador, sólo somos capaces de establecer las probabilidades de obtener cada uno de los resultados posibles.

La cuantización de la gravedad se topa aquí con un problema conceptual y es que la métrica, el observable en torno al que gira toda la teoría de la relatividad general, es una magnitud clásica i.e. siempre cuenta con un valor definido. La relatividad general es pues una teoría clásica como lo es también el electromagnetismo de Maxwell. Sin embargo, actualmente se sabe que la teoría de Maxwell no explica completamente el comportamiento del campo electromagnético cuando las distancias son muy pequeñas y energías muy altas para las cuales fue necesario desarrollar una nueva teoría: La electrodinámica cuántica ⁷. ¿Es entonces la relatividad general una teoría de campo medio? Lo cierto es que para la mayor parte de campos conocidos, éstos se construyen sobre una geometría espacio-temporal dada de antemano. Sin embargo, en el caso de la relatividad general dicha geometría del espacio-tiempo aparece como consecuencia directa de las ecuaciones de movimiento. Esto nos lleva a la paradoja del tiempo [8] [9] la cuál enfrenta la concepción del tiempo como variable absoluta de la mecánica cuántica en oposición directa al tiempo como variable dinámica en el marco de la relatividad general.

⁷Es por esta razón que el campo electromagnético clásico es considerado una teoría de campo efectivo. Puesto que a determinadas escalas los efectos cuánticos no son relevantes y pueden ser despreciados.

Además de estas incoherencias conceptuales, la acción de Hilbert-Einstein es incompatible con la física cuántica de campos ya que ésta no es renormalizable. El escalar de Ricci, como ya hemos indicado en (2.2), es la contracción total del tensor de Riemann. El tensor de Riemann está definido mediante derivadas segundas sobre la métrica, que es adimensional (Por lo que también será adimensional el factor $\sqrt{-g}$ del Lagrangiano). Cada derivada aporta una dimensión de $[masa]$ y la contracción es una operación que no afecta a la dimensionalidad. Haciendo uso de (3.17) G tiene dimensiones de $[masa]^{-2}$ luego el campo no es renormalizable a nivel perturbativo ⁸.

Cuantizar el campo gravitatorio descrito mediante la acción de Hilbert Einstein no sólo lleva a incoherencias conceptuales sino que tampoco puede realizarse de forma consistente. Llegamos pues a un punto en el que o bien debemos abordar el problema desde un nuevo paradigma (Teoría de cuerdas, gravedad cuántica de bucles, twistores...) o bien modificar el Lagrangiano de Hilbert-Einstein para hacerlo renormalizable en el ultravioleta.

4.2. Formulación de una nueva acción

Como se ha indicado en el apartado anterior, cada derivada sobre la métrica aporta una dimensión de $[masa]$. Para conseguir una constante de acoplamiento adimensional, el Lagrangiano debería contener derivadas cuartas sobre la métrica, basándonos en lo deducido anteriormente. En ese caso, la teoría sería renormalizable según (3.17).

En base a este razonamiento, se puede plantear un nuevo Lagrangiano [10]

$$\mathcal{L}_4 = \sqrt{g} \left(+\eta R_{\mu\nu\tau\omega} R^{\mu\nu\tau\omega} \alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \kappa^{-2} \gamma R \right) \quad (4.1)$$

donde $\kappa^2 = 32\pi G$ y $\gamma = 2$. El término $\eta R_{\mu\nu\tau\omega} R^{\mu\nu\tau\omega}$ puede ser excluido de nuestra nueva teoría ya que

$$\int d^4x \eta R_{\mu\nu\tau\omega} R^{\mu\nu\tau\omega} \quad (4.2)$$

será constante independientemente de la geometría del espacio considerado siempre y cuando sea topológicamente equivalente al espacio plano debido al teorema de la invarianza topológica de Gauss-Bonnet en cuatro dimensiones. Los coeficientes α y β son adimensionales y podrían determinarse mediante resultados experimentales.

Sin embargo, cabe esperar que los valores de α y β sean muy pequeños ya que los efectos de los términos del Lagrangiano que no son los de la acción de Hilbert-Einstein se hagan patentes en escalas de energía y longitud del orden de la energía de Planck y la longitud de Planck ya que las observaciones llevadas a cabo hasta el momento están de acuerdo con la teoría vigente.

Las ecuaciones de movimiento del campo gravitatorio bajo esta definición son [11]

$$H_{\mu\nu} = (\alpha - 2\beta) R_{\mu\nu} - \alpha R_{\mu\nu\eta}^{\eta} - \left(\frac{1}{2}\alpha - 2\beta\right) g_{\mu\nu} R_{\eta}^{\eta} + 2\alpha R^{\nu\lambda} R_{\mu\eta\nu\lambda} - 2\beta R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\alpha R^{\eta\lambda} R_{\eta\lambda} - \beta R^2) + \gamma \kappa^{-2} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma \kappa^{-2} g_{\mu\nu} R = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

Linealizando dicha expresión, trabajando en la métrica Schwarzschild bajo condiciones de

⁸Destacar que en un espacio bidimensional, la relatividad general sí que es renormalizable.

campo gravitatorio estacionario y con simetría esférica y en el caso de una partícula puntual para la que $T_{\mu\nu} = \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 M \delta^3(x)$ obtenemos un campo gravitatorio que obedece a un potencial

$$V = \frac{-\kappa^2 M}{8\pi\gamma r} + \frac{\kappa^2 M}{6\pi\gamma} \frac{e^{-m_2 r}}{r} - \frac{\kappa^2 M}{24\pi\gamma} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \quad (4.4)$$

donde $m_2 = \gamma^{\frac{1}{2}} (\alpha\kappa^2)^{-\frac{1}{2}}$ y $m_0 = \gamma^{\frac{1}{2}} [2(3\beta - \alpha)\kappa^2]^{-\frac{1}{2}}$. En el límite en el infinito de m_0 y m_2 i.e. en el caso en el que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$

$$\lim_{m_2, m_0 \rightarrow \infty, \infty} V = \frac{-\kappa^2 M}{8\pi\gamma r} \quad (4.5)$$

recobramos el potencial de la gravedad de Newton por lo que ambos paradigmas son compatibles. Esto nos permite establecer que $\gamma = 2$. Así, los efectos de este tipo de gravedad cuántica emergerán como correcciones al potencial newtoniano que se harán patentes en distancias r del orden la distancia de Planck. Hasta el momento la ley del inverso al cuadrado ha sido comprobada hasta el milímetro mediante balanzas de torsión [12] y se están estudiando modos de llegar a comprobarla escala nanométrica mediante haces pulsados de neutrones [13]

La interacción entre dos fuentes conservativas de campo definidas mediante sus tensores energía-momento $T_{\mu\nu}^{(1)}$ y $T_{\mu\nu}^{(2)}$ escrita en el espacio de momentos es [11]

$$\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left(T_{\rho\sigma}^{(2)} \right) T^{\mu\nu(1)} = \frac{\kappa^2}{2\gamma} \left[\frac{T_{\mu\nu}^{(1)} T^{\mu\nu(2)} - \frac{1}{2} T_\rho^{\rho(1)} T_\sigma^{\sigma(2)}}{\kappa^2} - \frac{T_{\mu\nu}^{(1)} T^{\mu\nu(2)} - \frac{1}{3} T_\rho^{\rho(1)} T_\sigma^{\sigma(2)}}{\kappa^2 + m_2^2} + \frac{T_\rho^{\rho(1)} T_\sigma^{\sigma(2)}}{\kappa^2 + m_0^2} \right] \quad (4.6)$$

donde queda patente que nos encontramos con tres tipos de partículas:

- El numerador del primer sumando de (4.6) se interpreta como un campo de espín 2. Dado que en el denominador del propagador asociado no aparece ningún término retardante, la partícula asociada se desplazará a la velocidad de la luz i.e. no tendrá masa. Esta partícula será pues un bosón sin masa de espín dos que popularmente se conoce como gravitón y cuya existencia también puede deducirse del Lagrangiano de Hilbert-Einstein tradicional.
- En el segundo término nos encontramos también con un campo de espín 2 aunque en este caso aparece un retardo m_2^2 en el denominador por lo que la partícula que emerge de dicho sumando poseerá masa no nula m_2 .
- El último término representa una partícula de masa no nula m_0 pero sin espín.

La principal problemática de este Lagrangiano con derivadas de cuarto orden y es que la energía asociada a la partícula masiva de spin 2 es negativa. Si calculamos la probabilidad de obtener dicha partícula obtenemos también resultados negativos [10] lo cual va en contra de las bases de la teoría de la probabilidad. Eliminar dicha partícula de nuestro modelo llevaría a una matriz de scattering no unitaria, violando los postulados de la mecánica cuántica y acabando con todo el trasfondo físico que pudiese tener la teoría basada en dicho Lagrangiano.

Así, pese a que nuestra teoría es renormalizable, deja de ser físicamente coherente en energías por encima de m_2 que se espera que sea del orden de la masa de Planck por lo que Lagrangianos de este tipo no nos permitirán acceder a la posible fenomenología de la gravedad cuántica.

Se pueden intentar Lagrangianos con derivadas de orden superior a fin de encontrar una teoría que ya no sea solo renormalizable sino super renormalizable. Esta aproximación es esperanzadora ya que podemos extraer de la formulación de la gravedad en teoría de cuerdas la siguiente acción efectiva asociada al campo gravitatorio.

$$S_{eff}(g_{\mu\nu}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N+2} \alpha_{2n} m^{4-2n} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{O}_{2n}(\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (4.7)$$

Donde el único parámetro dimensional es m que puede relacionarse con la tensión de la cuerda. Las constantes α_{2n} son simplemente constantes de acoplo sin dimensión y $\mathcal{O}_{2n}(\partial_\lambda g_{\mu\nu})$ agrupa los términos covariantes escalares con $2n$ derivadas sobre la métrica que se pueden formular [14].

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= R \\ \mathcal{O}_4 &= b_1 R^2 + b_2 R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + b_3 R_{\mu\nu}^2 \\ \mathcal{O}_6 &= c_1 R^3 + c_2 \square R^2 + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} \square R_{\mu\nu\rho\sigma} + c_4 R_{\mu\nu} \square R_{\mu\nu} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

La ventaja de partir de la gravedad de cuerdas es que en la teoría de cuerdas la gravedad es unitaria y renormalizable pudiendo siempre escoger una parametrización que nos libre de los ghost que aparecían en el caso analizado anteriormente. Sin embargo, al truncar la serie el problema de la no-unitariedad reaparece.

Cabría esperar que, de algún modo, este tipo de acercamiento a la gravedad cuántica modificase los valores de los polos del propagador del tipo [14]

$$G(k) = \left[\sum_{n=0}^{N+1} l_{2(n+1)} k^{2(n+1)} \right]^{-1} \quad (4.9)$$

que puede ser descompuesto en propagadores simples

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N+1} \frac{A_n}{k^2 + m_n^2} \quad (4.10)$$

donde $m_0 = 0$ y $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{N+1}$ (Pues se corresponde con el propagador asociado al gravitón). A priori, se podría suponer que existe un conjunto de $\{l_2, l_4, \dots, l_{2N+2}, l_{2N+4}\}$ tal que $\{A_0, A_1, \dots, A_N\}$ sean positivas y sólo A_N sea negativa de manera que sólo la partícula más masiva que contempla la teoría sea un ghost. A partir de la energía asociada a dicho ghost, la teoría perderá su valor físico sin embargo, si esta masa es lo suficientemente elevada, nos será posible explorar cierto rango de energías/longitudes en el que cabe esperar la aparición de efectos atribuibles a la gravedad cuántica.

Pero, asumiendo que las masas son todas no degeneradas, $G(k^2)^{-1}$ será un polinomio con soluciones sobre el eje real, los signos de las pendientes de los ceros consecutivos se intercalan por lo que los signos de los coeficientes A_i y A_{i+1} serán también de signo opuesto. Así pues, nos

es imposible esquivar los ghost en el entorno de m_P aún cuando consideramos Lagrangianos con derivadas de orden superior a 4 [14] .

Sin embargo, la acción polinómica superrenormalizable todavía podría tener algo que ofrecer y es que las masas no tienen por qué ser soluciones reales y positivas sino que podemos suponer que son números complejos conjugados. En este caso conocido como gravedad de Lee-Wick[15], la teoría, además de ser renormalizable, da lugar a matrices de scattering unitarias. Sin embargo, se rompe con la Simetría de Poincaré⁹ que toda teoría formulada en consonancia con la relatividad especial debe tener.

5. Gravedad cuántica con términos no locales

Otra vía que se ha abierto en los últimos años es la de las teorías que, en lugar de derivadas de orden superior, posean términos no locales en la acción [16]

$$\mathcal{L} = \kappa^2 \sqrt{g} \left(R + G_{\mu\nu} \frac{e^{H(\sigma\Box)-1}}{\Box} R_{\mu\nu} + \mathcal{V} \right) \quad (5.1)$$

Donde H es una función entera. Como el factor de forma de la no localidad $e^{H(\sigma\Box)}$ depende de una función entera, la teoría se considera débilmente no local. \mathcal{V} es un potencial que agrupa las potencias de grado igual mayor que 3 del tensor de Riemman y de sus contracciones y derivadas.

Esta teoría se supone unitaria, renormalizable o finita e invariante bajo transformaciones de Lorentz. La introducción de términos no locales produce ecuaciones de movimiento acausales que son incompatibles con la teoría clásica. Es por ello que el término no local debe de ser relevante sólo en el ámbito cuántico, donde dicha acausalidad no supone ningún problema [17]

5.1. Unitariedad en teorías con términos no locales en la acción

Como ya se vio en 4, uno de los campos que trae consigo la gravedad cuántica es un campo escalar masivo. La acción del campo cuártico¹⁰ en el seno de un campo escalar es [7]

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \left((\partial^\mu \phi)^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{12} |\phi|^4 \right) \quad (5.2)$$

si se tiene en cuenta que:

$$\partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi) = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) + \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi \leftrightarrow (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) = \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi) - \phi^* \Box \phi \quad (5.3)$$

donde $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$ es el operador D'Alembertiano y se introduce (5.3) en (5.2) , el término

$$\int \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi) dx^4 \quad (5.4)$$

⁹Que una teoría tenga Simetría de Poincaré significa que es invariante bajo el Grupo de Poincaré. Este grupo aún las transformaciones del grupo de Lorentz y las traslaciones espacio-temporales.

¹⁰Un campo escalar simple y autointeractuante con escasa aplicación en sistemas reales pero muy práctico a nivel académico.

aplicando el teorema de la divergencia e imponiendo que en el límite al infinito se anulan tanto ϕ como sus derivadas primeras

$$\int \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu) dx^4 = \int \phi^* \partial_\mu \phi dx^3 = 0 \quad (5.5)$$

Tras estas operaciones (5.2) queda

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \left(-\phi^* \square \phi - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{12} |\phi|^4 \right) \quad (5.6)$$

La función de correlación entre dos puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 en la imagen de Heisenberg es [7]

$$\langle \Omega | T \phi_H(\mathbf{x}_1) \phi_H(\mathbf{x}_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\phi \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \exp \left(i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right)}{\int D\phi \exp \left(i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right)} \quad (5.7)$$

A partir de (5.7) puede extraerse el propagador asociado a dicho campo. Sin embargo, el término de interacción $\frac{\lambda}{12} |\phi|^4$ hace que no sea posible calcular (5.7) analíticamente. Al igual que se hace con algunos sistemas en primera cuantización, podemos considerar λ lo suficientemente pequeño como para poder tratarlo como una perturbación sobre el campo escalar. Las rutinas de cálculo que conlleva este procedimiento fueron desarrolladas por Feynmann y se resumen en lo que hoy en día conocemos como Reglas de Feynmann [18].

Sin embargo, cuando calculamos el segundo orden de perturbación aparecen los diagramas de Feynman de la figura 5.1 que equivalen a la integral (5.8)

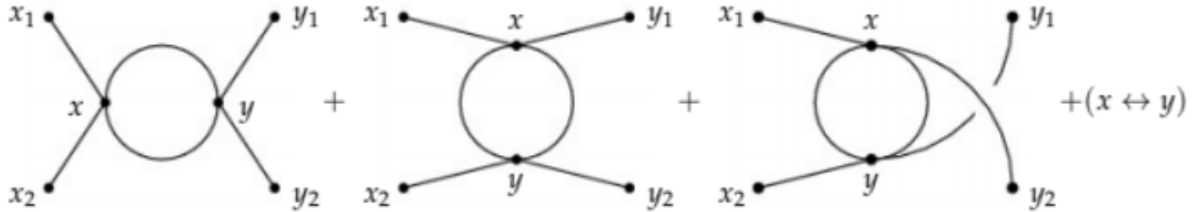


Figura 5.1: Diagramas de Feynmann correspondientes a la perturbación a segundo orden del campo 5.2 [18]

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta(p^1 + p^2 - k_1 - k_2) \left\{ -i\lambda + \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) + \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 - p_1 - q) + \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 p_2 - q) \right] \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.8)$$

donde los $\tilde{D}_F(x)$ son los propagadores de Feynmann de un campo escalar sin perturbar en la imagen de momentos (5.9):

$$\tilde{D}_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (5.9)$$

En (5.8) el momento q no está acotado. Físicamente esto significa que entre los estados inicial y final existen infinitos estados intermedios en los que se crean y se aniquilan pares partícula-antipartícula de momento arbitrario. De manera análoga a lo que ocurriría en el caso del vacío

cuántico, los estados con mayor momento hacen diverger la integral. Nos encontramos de nuevo ante una divergencia ultravioleta que podría renormalizarse ya que la constante de acoplo λ es adimensional.

Sin embargo nuestro objetivo es no tener que aplicar el grupo de renormalización aún si en este caso funciona, para ello, al igual que en [19] reformularemos la acción añadiendo derivadas de orden superior al término no interactuante (5.6) de (5.6) mediante un operador $e^{\left(\frac{\square}{\Lambda^2}\right)^s}$ en el que Λ es un regulador ultravioleta y $s \in \mathbb{R}^+$

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \phi^* e^{\left(\frac{\square}{\Lambda^2}\right)^s} (-\square - m^2) \phi - \frac{\lambda}{12} |\phi|^4 \right\} \quad (5.10)$$

Si eliminamos el término de autointeracción, los propagadores de Feynmann de éste nuevo campo escalar pueden calcularse analíticamente haciendo uso de la expresión (5.7). Para ello realizamos la transformada de Fourier del campo ϕ de modo que

$$\phi = \frac{1}{V} \sum_n \phi'(k_n) e^{-ik_n x} \quad \phi^* = \frac{1}{V} \sum_l \phi'^*(k_l) e^{ik_n x} \quad (5.11)$$

como \square es un operador diagonal en la base en la que están representados ϕ y ϕ^* en (5.11), también lo será $e^{\left(\frac{\square}{\Lambda^2}\right)^s}$ con autovalores e^{ω_i} donde ω_i es el autovalor para $\left(\frac{\square}{\Lambda^2}\right)^s$ al actuar sobre el elemento i de la base

$$\left(\frac{\square}{\Lambda^2}\right)^s e^{ik_n x} = -\left(\frac{k_i}{\Lambda}\right)^{2s} e^{ik_n x} \rightarrow \omega_i = -\left(\frac{k_i}{\Lambda}\right)^{2s} \quad (5.12)$$

introduciendo (5.11) y (5.12) en (5.10), considerando el caso en el que el campo no exhibe autointeracción i.e. $\lambda = 0$

$$S(\phi) = \frac{1}{2V^2} \sum_{n,l} \phi'^*(k_l) \phi'(k_n) e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) \int d^4x e^{i(k_n - k_l)x} \quad (5.13)$$

donde, debido a la ortogonalidad de la base de Fourier

$$\int d^4x e^{i(k_n - k_l)x} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq n \\ V & \text{si } l = n \end{cases} = V \delta(l - n) \quad (5.14)$$

lo que nos permite reescribir (5.13)

$$S(\phi) = \frac{1}{2V^2} \sum_{n,l} \phi'^*(k_l) \phi'(k_n) e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) V \delta(k_n - k_l) = \frac{1}{2V} \sum_n |\phi'(k_n)|^2 e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) \quad (5.15)$$

las amplitudes de cada modo en base de Fourier $\phi(k_n)$ son complejas, sin embargo, el campo $\phi(x)$ es real lo cuál implica

$$\phi'(-k_n) = \phi'^*(k_n) \rightarrow |\phi'(-k_n)|^2 = |\phi'(k_n)|^2 = |\phi'_n|^2 \quad (5.16)$$

Como los modos están simétricamente distribuidos en torno a $k_n^0 = 0$.

$$S(\phi) = \sum_{k_n^0 > 0} |\phi'_n|^2 e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) \quad (5.17)$$

así pues, el denominador de (5.7) para éste campo será.

$$\begin{aligned} \int D\phi e^{\frac{i}{V} \sum_{k_n^0 > 0} |\phi'_n|^2} e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) &= \prod_{k_n^0 > 0} \int DRe(\phi_n) DImg(\phi_n) e^{\frac{i}{V} Re(\phi'_n)^2 + Img(\phi'_n)^2} e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) \\ &= \prod_{k_n^0 > 0} \sqrt{\frac{iV\pi}{(k_n^2 - m^2) e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^2}}} \sqrt{\frac{iV\pi}{(k_n^2 - m^2) e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^2}}} = \prod_n \sqrt{\frac{iV\pi}{(k_n^2 - m^2) e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^2}}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde en la última igualdad se ha vuelto a aplicar (5.16). En lo que concierne al numerador de (5.7) considerando el campo (5.10).

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \sum_{m,l} e^{i(k_n x_1 + k_l x_2)} \int DRe(\phi_n) DImg(\phi_n) (Re(\phi_m) + iImg(\phi_m)) (Re(\phi_l) + iImg(\phi_l)) \\ \times \prod_n e^{\frac{i}{V} \sum_{k_n^0 > 0} (Re(\phi'_n)^2 + Img(\phi'_n)^2)} e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}} (k_n^2 - m^2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para simplificar el cálculo de (5.19) tenemos en cuenta las siguientes observaciones:

- La integral de los términos para los que $k_l \neq \pm k_m$ será nula debido a que el integrando será una función impar.
- En el caso $k_l = k_m$, expandimos el producto del integrando

$$(Re(\phi_m) + iImg(\phi_m)) (Re(\phi_m) + iImg(\phi_m)) = Re(\phi_m)^2 - Img(\phi_m)^2 + 2iRe(\phi_m) Img(\phi_m) \quad (5.20)$$

el término imaginario es impar por lo que hará cero la integral. A su vez, los integrandos que contienen a $Img(\phi_m)^2$ y $Re(\phi_m)^2$ producirán dos integrales no nulas de igual valor que, debido a que tienen signo distinto, anularán todo el conjunto.

- Si $k_l = -k_m$, debido a (5.16) implica que $Img(\phi_l) = -Img(\phi_m)$ con lo cual, el producto del integrando queda

$$(Re(\phi_m) + iImg(\phi_m)) (Re(\phi_m) - iImg(\phi_m)) = Re(\phi_m)^2 + Img(\phi_m)^2 \quad (5.21)$$

En (5.21), $Img(\phi_m)^2$ y $Re(\phi_m)^2$ tienen el mismo signo. Éste será el caso para el que la integral será no nula.

Teniendo en cuenta lo razonado, integramos el numerador para $k_l = -k_m$ obteniendo.

$$\frac{1}{V^2} \sum_m e^{-ik_m(x_1 - x_2)} \left(\prod_n \sqrt{\frac{i\pi V}{Kn^2 - m^2}} \right) \frac{-iV e^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}}}{m^2 - k_n^2 + i\epsilon} \quad (5.22)$$

Lo que hace que la función de correlación para el campo (5.10) con $\lambda = 0$ sea.

$$\langle \Omega | T\phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) | \Omega \rangle = \frac{1}{V} \sum_m e^{-ik_m(x_1 - x_2)} \frac{-ie^{\left(\frac{k_n}{\Lambda}\right)^{2s}}}{m^2 - k_n^2 + i\epsilon} \quad (5.23)$$

donde aparece la forma discretizada del propagador asociado a dicho campo. Si pasamos al límite continuo en el que $L \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\frac{1}{V} \sum_m \rightarrow \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Rightarrow \langle 0 | T \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_{E1}-x_{E2})} e^{-\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{2s}}}{k^2 - m^2} \quad (5.24)$$

La integral de (5.24) se lleva a cabo en un espacio con geometría de Minkowski. Para abordar el problema bajo el formalismo de las funciones de Schwinger, debemos transformar el espacio-tiempo en uno euclídeo lo cual puede verse de forma dual como realizar una rotación de Wick en el espacio de momentos

$$k_0 \rightarrow ik_0 \Rightarrow \begin{cases} k^2 \rightarrow -k^2 \\ kx_i \rightarrow -kx_i \end{cases} \Rightarrow \langle 0 | \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_{E2}-x_{E1})} e^{-\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{2s}}}{k^2 + m^2} \quad (5.25)$$

el propagador tras esta transformación queda

$$\Delta(k) = \frac{e^{-\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{2s}}}{k^2 + m^2} \quad (5.26)$$

La función de Schwinger de dos puntos asociada a éste campo es

$$S_2(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\left(\frac{p}{\Lambda}\right)^{2s}}}{k^2 + m^2} e^{ip(y-x)} \quad (5.27)$$

al someterla a la reflexión temporal en puntos coincidentes (3.18) se obtiene

$$S_2(-\tau, x; \tau, x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\left(\frac{p}{\Lambda}\right)^{2s}}}{k^2 + m^2} e^{2ip^0 \tau} \quad (5.28)$$

que puede reducirse a una integral en dos variables haciendo un cambio a coordenadas esféricas

$$S_2(-\tau, x; \tau, x) = \frac{1}{8\pi^2} \int dr r^3 \frac{e^{-\left(\frac{r}{\Lambda}\right)^{2s}}}{r^2 + m^2} \int d\alpha \sin^2(\alpha) e^{2i r \cos(\alpha) \tau} \quad (5.29)$$

La integral (5.29) puede calcularse analíticamente para el caso en el que el factor $s \in [0, 1]$ donde puede ser reescrita como combinación convexa no-negativa de términos gaussianos [19]. En cualquier caso, puede ser evaluada mediante métodos numéricos ¹¹. Para varios valores de s , $S_2(\tau)$ es de la forma

¹¹El cálculo numérico se ha realizado usando Wolfram Alpha.

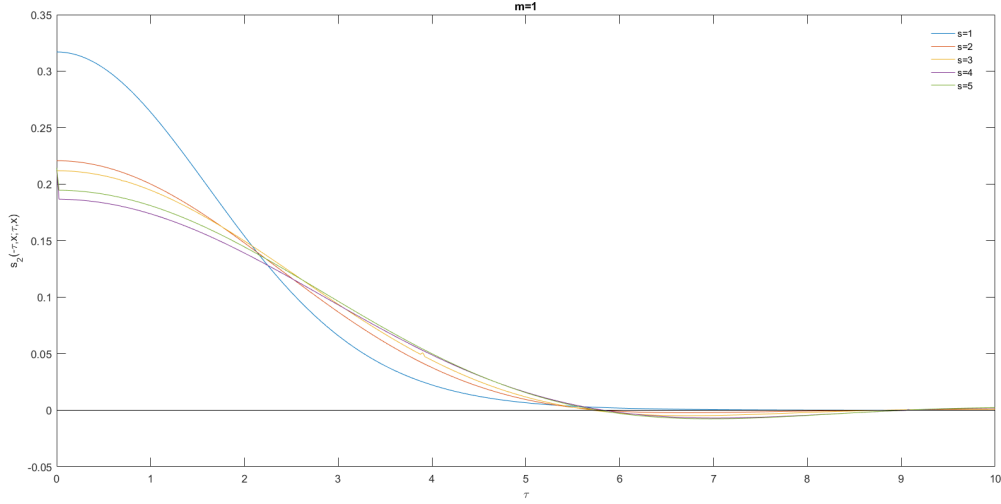


Figura 5.2: Dependencia de (5.29) con el tiempo euclideo. Se observa que existen tiempos para los que la integral se hace negativa para valores de s mayores que 1, lo que viola la positividad en la reflexión de Osterwalder-Schrader e invalida la teoría propuesta desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos.

Ahora bien, si consideramos que el campo (5.10) no tiene masa, es decir, si hacemos $m = 0$ en (5.29) y representamos de nuevo la dependencia de (5.29) con el tiempo euclideo τ obtenemos que la positividad por reflexión se respeta para todo valor de s , tal y como se muestra en 5.3.

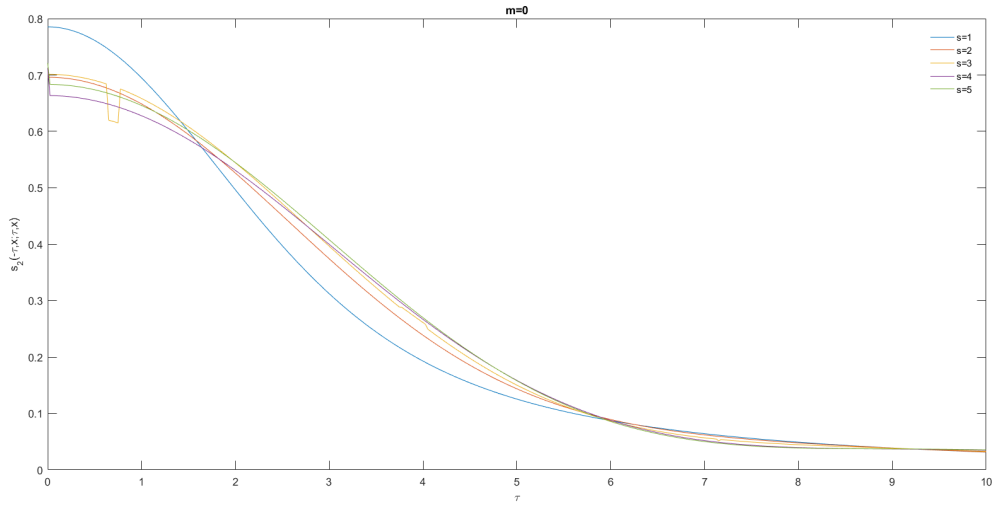


Figura 5.3: Si hacemos $m = 0$, $S_2(-\tau, x; \tau, x)$ es positiva para todo valor de τ

Puede ser interesante, obtenido este resultado, comprobar cuál es el comportamiento de $S_2(-\tau, x; \tau, x)$ en función de la masa del campo. En 5.4 se han representado los tiempos a los que $S_2(-\tau, x; \tau, x)$ para campos con distintos valores de masa.

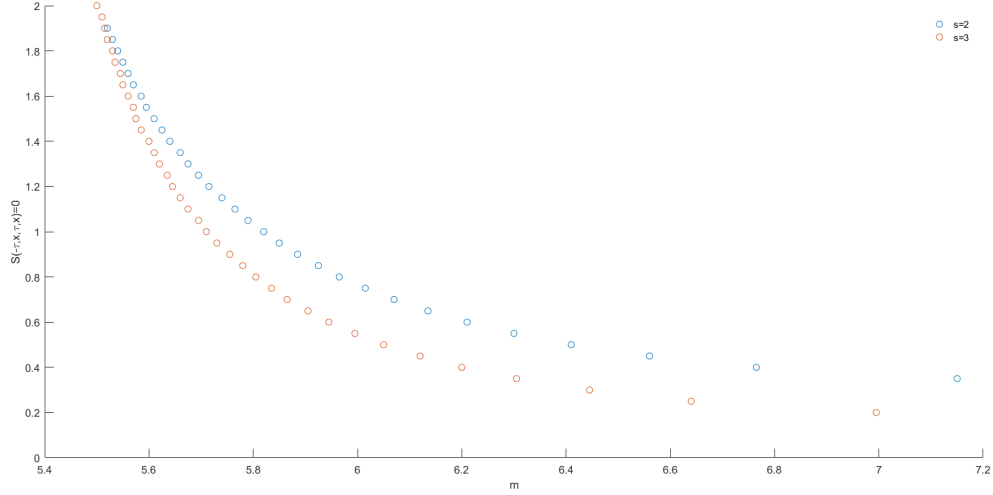


Figura 5.4: Los τ para los que $S_2(-\tau, x; \tau, x)$ deja de ser positiva en función del valor de la masa del campo para $s = 2$ y $s = 3$

La distribución obtenida se ajusta bastante bien a una curva de expresión

$$f(m) = k \cdot m^{-q} + c \quad (5.30)$$

donde k , q y c son números reales y positivos y, en el caso de k y q , distintos de cero. Así pues, en el límite $m \rightarrow 0$ de (5.30) recuperamos el resultado que se mostró en 5.3: Para masas nulas, $S_2(-\tau, x; \tau, x)$ se anula en τ infinito lo que la función será siempre positiva.

Se podría entonces suponer que la teoría será admisible para el caso $s = 1$ o para cualquier s y $m = 0$, sin embargo, que $S_2(\theta x, x)$ sea positiva no implica necesariamente que lo sea S_2 . De hecho, la S_2 no admite representación de Källen-Lehmann [19] aún en el caso en el que $m = 0$ por lo que (5.10) no representa una teoría cuántica admisible para ningún valor de s .

6. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado cómo una teoría de la gravedad regida por el Lagrangiano de Hilbert-Einstein muestra divergencias ultravioletas que no es posible reabsorber mediante renormalización

Se ha comprobado también que añadiendo al Lagrangiano de Hilbert-Einstein términos con derivadas de orden superior sobre la métrica se consiguen teorías de la gravedad renormalizables o superrenormalizables a nivel perturbativo que son además compatibles a nivel clásico con las medidas realizadas hasta el momento. En este punto podemos suponer que las los polos de los propagadores derivados de estas teorías sean:

- **Reales** en cuyo caso aparecen, además del gravitón sin masa de espín 2 que ya aparece si analizamos el contenido en partículas del Lagrangiano de Hilbert Einstein, nuevas partículas masivas entre las cuales encontramos *ghost* que violan la unitariedad de la matriz de scattering.

- **Complejos conjugados** donde pasamos a encontrarnos en el contexto de una teoría de Lee-Wick que se ha demostrado no ser invariante bajo el grupo de Poincaré por lo que no es compatible con la relatividad especial.

Se ha intentado otro método en el que en lugar de derivadas de orden superior incorporamos términos no locales. Se han estudiado las propiedades de este término al actuar sobre un campo escalar masivo como el que hemos visto que emergía en el caso del Lagrangiano con derivadas de cuarto orden. En este caso el término no local actúa como regulador de las divergencias ultravioleta. Descubrimos que, para el caso en el que el campo no tiene masa, su función de Schwinger es positiva con reflexión temporal en puntos coincidentes. Sin embargo, en ningún caso dicha teoría tendrá una representación de Källen-Lehman con una función densidad definida siempre positiva por lo que, desde el punto de vista de la física cuántica de campos, no es una teoría válida.

Así, a la ausencia de fenómenos que nos ayuden a discernir experimentalmente entre una teoría de gravedad cuántica se le suma el hecho de que no se cuenta con una formulación teóricamente consistente para dicha teoría.

Existen un innumerables tentativas que no se han abordado en este trabajo (teoría de Cuerdas y Supercuerdas, la teoría de Twistores de Penrose, gravedad cuántica de bucles...) que persiguen la unificación de la gravedad y la física cuántica proponiendo nuevos fundamentos de los cuales emerjan ambas. La elegancia de este enfoque sin embargo se ha visto refrenada en la última década ante la imposibilidad de obtener la física conocida a partir de ellas.

En defensa de la investigación en gravedad cuántica debemos decir que, pese a la ausencia de resultados, éste problema ha motivado a los físicos teóricos a analizar profundamente los fundamentos e inconsistencias de las grandes teorías que dominan la física actual de modo que, aunque no se haya conseguido todavía una teoría coherente, las reflexiones vertidas y las matemáticas desarrolladas para abordar esta cuestión puede que sean de utilidad en el futuro de ésta u otras doctrinas.

Referencias

- [1] C. Isham. Structural issues in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9510063*, 1995.
- [2] S. Carlip. *Quantum Gravity: a Progress Report*. Rept.Prog.Phys.64:885,2001
- [3] R. M. Wald. *General relativity*. Chicago [etc.] : University of Chicago Press, cop. 1984., 1984.
- [4] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. San Francisco, USA: Addison-Wesley. 2004.
- [5] J. C. Baker, K. Grainge, M. P. Hobson et al. Detection of cosmic microwave background structure in a second field with the Cosmic Anisotropy Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308:1173–1178, October1999.
- [6] Manuel Asorey. Mini-course on quantum field theory., 2016. Accepted for publication.
- [7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Selected monographies: 22. [Beijing] : Collaage Press, cop. 1998., 1998.
- [8] E. Anderson. Problem of time in quantum gravity. *Annalen der Physik*, 524(12):757, 2012.
- [9] C. Kiefer. Conceptual problems in quantum gravity and quantum cosmology. *ISRN Mathematical Physics* 509316, 2013.
- [10] K.S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, 16(4):953, 1977.
- [11] K.S. Stelle. Classical gravity with higher derivatives. *General Relativity and Gravitation*, 9(4):353–371, 1978.
- [12] E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, S. Hoedl, and S. Schlamminger. Review: Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 62:102 – 134, 2009.
- [13] C. C. Haddock, N. Oi, K. Hirota et al. Search for deviations from the inverse square law of gravity at nm range using a pulsed neutron beam. *Physical review D*, 97(6), n.d.
- [14] M. Asorey, J.L. López, y Ilya Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 12(32):5711–5734, 1997.
- [15] L. Modesto y I.L. Saphiro. Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts. *Physics Letters B, Vol 755, Iss , Pp 279-284 (2016)*, (279-284):279, 2016.
- [16] L. Modesto y Lesław Rachwal Super-renormalizable y finite gravitational theories. *Nuclear Physics B, Vol 889, Iss C, Pp 228-248 (2014)*, (C):228, 2014.
- [17] E. Belgacem. Nonlocal gravity. conceptual aspects y cosmological predictions. *Journal of cosmology and astroparticle physics*, (3), n.d.
- [18] M. Maggiore . *A modern introduction to quantum field theory*. Oxford master series in physics: 12. Oxford [etc.] : Oxford University Press, 2005.
- [19] M. Asorey, Lesław Rachwal and Ilya Saphiro *Unitary issues in some higher derivative field theories*. *Galaxies* 6.1 (2018):23. 2018.